卒業論文

発見的方法に基づく問題解決方略の指導に関する一考察

東京学芸大学 教育学部
小学校教員養成課程 数学選修

大久保 正弘

発見的方法に基づく問題解決方略の指導に関する一考察

序章

研究動機

「この解法はうまくて間違いがないように見えるけれども、どうしたらそれを思いつくことができるだろうか。この実験はうまくて事実を示すように思われるが、どうしたらそれが発見できたであろうか。どうしたら私は自分でそれを思いついたり発見したりできるであろうか」

これは、G.ポリア著『いかにして問題を解くか』[i]のはしがきの一節である。

筆者は浪人時代に秋山仁という予備校講師（現 東海大東海大学教育研究所）に数学では随分影響された。彼の著作『発見的教授法による数学シリーズ』[ii]は、まさにストラテジーを詳細に分け、受験に即するよう適用したものだった。しかしながら、自分にはなかなかそのストラテジーをものにできず、いわゆる難問といわれるものは解けるようにはならなかった。

それでも、「対称性を活かす」「命題と論理」「場合分け」「２つ以上の動きがあるときは、片方を一時止めて考える」・・・などといった数学に必要な、それでいて教科書には書かれていない知識を得ることができた。公式を理解することだけでなく、もっと高い視野から問題を見下ろすことを知り、数学が楽しくなったのを憶えている。

筆者はいまだに、数学に対して相当な苦手意識を持っている。初めてみるような問題に直面すると「歯が立ちそうにない」と挫けてしまいそうになる。自分を慰めながら、励ましながら、なんとか筆を取る。投げ出してしまうこともあるし、自分なりの解決を導いて達成感に清々しくなることもある。

「どうしたら問題は解けるのだろうか」「もっとうまい方法はないだろうか」「どんな問題にも対抗できる力や考え方はないだろうか」・・・

そのような「あらゆる問題に通じる一般性のある（問題解決の）方法」について考えると同時に、また、どうしてストラテジーをうまく使うことができなかったのか、振り返ってみることにする。

研究の内容

『いかにして問題を解くか』をはじめとするポリアの著作は、こうした立場に立って書かれ、以後の問題解決ストラテジー研究に大きな影響を及ぼした。彼の「発見学」の立場に立って、問題解決ストラテジーの指導について、先行研究などをまじえながら考察していくことにする。

第一章 問題解決

第一節 問題解決の位置づけと必要性

1-1-1 NCTM スタンダードから

NCTM はスタンダードの中で、生徒のための新しい目標の３つめに
「3. 数学的問題解決者となる　　各生徒の問題解決能力を開発することは、もし、彼または彼女が生産的市民になろうとするなら、必須である。我々は、An Agenda for Action{National Council of Teachers of Mathematics 1980}の第１勧告「問題解決は、学校数学の焦点とならなければならない。」(p.2)を強く支持する。この能力を開発するために、生徒は解決に何時間、何日、更に何週間もかかる問題に取り組む必要がある。独りで成し遂げるべき比較的簡単な問題もあるだろうが、小グループもしくはクラス全体の協力による学習を含むべき問題もある。また、正解のないオープンエンドな問題もあれば、定式化すべき問題もある。」[iii]と記しており、各学年（スタンダードのなかでは、幼稚園から第４学年、第５学年から第８学年、第９学年から第１２学年の３段階に分けている）に１０個ずつ掲げられたスタンダードのうち、問題解決を１番めのスタンダードに位置づけている。

例えば、第５学年から第８学年では、以下のようなことが述べられている。(p.79)
「　*第５学年から第８学年では、数学カリキュラムは、生徒が次のことができるように、探求(inqury)と応用の方法としての問題解決の数多くの様々な経験を積むべきである。*

- ◆ *数学の内容を調べ(investigate)理解するために問題解決アプローチを使う*
- ◆ *数学内外の場面から問題を定式化する。*
- ◆ *多段階問題およびノンルーティンな問題に力点を置きながら、問題を解くための多様な方略を開発し、応用する。*
- ◆ *もとの問題場面に照らして結果を確かめ(verify)、解釈する。*
- ◆ *解法や方略を新しい場面に一般化する。*
- ◆ *数学を有意味に利用する際の自信(confidence)を得る。*　」

また、別のページには、こう記されている。(p.11)
「問題を解決するに先立って、式の操作やアルゴリズムの練習を重視する伝統的な教授は、知識がしばしば問題から現れるという事実を無視している。このことは、計算技能が文章題に優先すべきという期待の代わりに、問題を伴っての経験が計算能力の開発を助けることを示唆している。従って、教授に対する現在の方略は逆転される必要があるであろう。つまり、知識は問題との経験から出現すべきなのである。この方法によって、生徒は特定の概念や手順を適用する必要性を認識し、後になって知識を再構成するための強力な概念的基礎を持つことになるであろう。」

生徒の活動は、問題場面(situation:状況)から生まれ、主体的に数学に熱中することで学習が進んでいく。そして、問題を解決する経験の中で、知識を獲得していくと強調している。

1-1-2 我が国の問題解決

(1) 変遷

我が国では、明治時代以降西洋の数学教育を導入していたが、第二次大戦前までは和算の内容も多少は残っていた。1905 年（明治３８年）の国定「黒表紙教科書」の使用から、1935 年（昭和１０）に「緑表紙教科書」が誕生するまでの約３０余年間、多くの算術や数学に関する指導や研究が行われていたが、問題解決についても「四則応用問題」の解決から漸次発展し、実生活と関連の深い「事実問題」の重視へと変わっていることが分かった。

1945 年以降は、問題解決という言葉が定着しつつあるものの、1960 年代までは、問題解決を文章題の解決と混同した理論及び実践研究が行われていた。しかし、1977 年の島田茂編著の『数学のオープンエンドアプローチ』[iv]においては、既に問題解決におけるオープンな場面からの新しい問題解決のアプローチが展開されていた。

(2) 学習指導要領における問題解決の取り扱い

平成元年告示の小学校学習指導要領では、「指導計画の作成と各学年にわたる内容の取り扱い」において、

> 2. 第 2 の内容の取り扱いについては、次の事項に配慮する必要がある。
> (1) 児童が自ら考える場を適宜設け、児童の発達段階や学習の達成状況に応じた具体的な操作や思考実験などの活動ができるようにし、論理的な思考力や直感力を漸次育成するようにすること。

平成 11 年告示の新学習指導要領のなかでは、

> 第3　指導計画の作成と各学年にわたる内容の取り扱い
> 1 指導計画の作成に当たっては、次の事項に配慮するものとする。
> (2) 論理的な思考力や直感力、問題解決の能力を育成するため、実生活における様々な事象との関連を図りつつ、作業的・体験的な活動など算数的活動を積極的に取り入れるようにすること。

指導要領解説[v]の中では、以下のように述べられている。

「　今回の改訂の特色として、自ら学び、自ら考えるなど生きる力を育成することを挙げることができる。このことに関連して、算数では、実生活における様々な事象との関連を考慮しつ

つ、児童がゆとりをもって学ぶことの楽しさを味わいながら作業的・体験的な活動など算数的活動に取り組み、数量や図形についての意味を理解し、数学的に考える力を育て、それらを活用していけるようにすることを重視した。

特に、今回の改訂の趣旨の実現をめざして、問題解決の能力を育成すること、実生活との関連を図ること、算数的活動を積極的に取り入れることを示した。

・・・

以上のように、問題の解決にかかわって情報の収集、選択、処理、活用、創造などの諸活動をさせるためには、筋道を立て、見通しをもって考えることなどが必要になる。また、その過程では、論理的な思考力や直感力が一層重要な働きをすると考えられる。

なお、問題解決の能力を一層育成する観点から、次の事柄について配慮する必要がある。

① 問題の発見や構成、問題を自分のものとする段階の指導を充実する。
② 問題を解決するのに必要な情報を集めたり、条件を整理したりすることができるようにする。
③ 自力解決の場と時間を確保し、見通しをもち自ら考える活動が十分できるようにする。
④ 作業的・体験的な活動など算数的活動を積極的に取り入れて学習活動を多様化し、児童の発想や仕方が生かされ、学習の楽しさや充実感が味わえるようにする。
⑤ 児童が、各自の自力解決について情報交換したり、まなびあったりする場を充実し、自分のよさに気付いたり、ほかの人のよさに学んだりできるようにし、学習集団が互いの学びの場として機能できるようにする。　　」

第二節 問題解決と発見的方法

1-2-1 問題解決と問題

(1)問題

われわれは、数学の問題を解く際に、軽々しく、「問題」と呼んでいるが、問題解決に用いられるような「問題」とは何が違うのだろうか。問題とは果たしてなんなのだろうか。

竹内芳男・沢田利夫の『問題から問題へ』[vi]の中にこう記されている。

「われわれがなんらかの形で課題解決を要求されるような状況に当面し、しかもそれを習慣的手段によって解決しえないような場合には、手段の探索がおこなわれ、その変形が生じ、あるいは手段体系のあたらしい構成が生じるが、このような課題状況に対処する精神機能を思考という。

（平凡社刊「哲学事典」昭和４６年, p.572）

この「思考」の定義において、「課題」を「問題」におきかえれば、問題こそ思考活動を誘発する原動力である。[ついでに上掲事典によれば、研究の課題を問題と定義している。(P.1402)]

問題のないところでは思考ははたらかない。数学的活動にはすぐれて思考活動が要求される。したがって、数学の学習が成立する前提条件として、問題がなければならない。この意味でも、学習は問題解決であるというデューイのテーゼが深い意味を持つことになる。算数・数学の授業においても、私たちはまずはじめに「導入問題」を提示する。これがこれから行われる学習への動機づけと学習意欲、そして学習のねらいを明示することになる。」
竹内芳男・沢田利夫著(昭和 60)『問題から問題へ』初版 第２刷 P.14

　つまり、問題とは、思考活動を誘発するような、きまったやり方で解決できないような、どうやったらいいかをいろいろ考えさせるものであると考えられる。

(2)問題解決

　ポリアはこう述べている。[vii]
「ある問題を解くとは、即座に得られる方法(way)を知らない状況で、ある方法を見いだすこと、困難を抜け出す方法を見いだすこと、障害を迂回する(around)方法を見つけること、望ましい結果を達成することである。そして、それはすぐには達しえないが適切な手段によって達しうるものである。」

1-2-2 発見法

(1) ポリアの発見学

G.ポリアは発見学についてつぎのように言及している。
「発見学を正確に定義することは難しい。論理学か、哲学か、心理学に属する研究でしばしば言及されるが、詳しく論じられた試しもなく、現在では忘れられたも同然の学問である。その目的は、発見や発明の方法と法則を研究することである。… この本は、発見学を近代的な形で復活させ、これにつつましい表現を与えようとしたのである。」[viii]

　発見学の定義は難しいという。彼は、この発見学を近代的な形で復活させようとし、著書『いかにして問題をとくか』の中では、「近代発見学」という言葉を用いていた。では、もとの発見学はどんなものであったのだろうか。

　岩波『哲学・思想事典』[ix]　では、「発見技法」という言葉ではあるが、以下のように記載されている。
「発見技法　[ラテン語]ars inveniendi 伝統的論理学・修辞学の中の一部門で、議論の対象となる事柄を発見・着想する技法。キケロ『トピカ』によると、修辞学は、発見、配置、詩姿ないし文体、記憶、講演法の五部門を含み、発見は、論証と感動という二つの目的を有する。ただし、中世への影響においては、

キケロによる論理学の二分類、発見・着想(inventio)と、真偽の判別に関わる判断への分類の方が重要である。この二分類は、アリストテレスの論理学的著作の分類に対応し、中世では、分析論・論証論（『分析論前・後書』）と、弁証論・トピカ（『トピカ』と『詭弁論駁論』）への分類として継承された。その際、発見に対応するのは、仮説的な推論、蓋然的な推論、詭弁的命題等に関わるものであり、中世においては代表の理論、ソフィスマータの理論等において発展をとげたが、発見の側面は看過された。→レトリック

アルゴリコラは、キケロによる論理学の発見と判断への分類を踏襲したが、ラムスも、修辞学の伝統を評価し、アリストテレス主義への批判ということから、キケロ流の分類を採用した。この場合、「発見」とは、命題の場合は、中項(medium)を見出すことで、論証を構成することであった。「発見」の概念そのものは、中世論理学にも見出されるが、ラムスの「発見技法」が１７世紀に至るまで大きな影響を及ぼしたのは、むしろ「方法」、つまり「既知から未知のものの推論」と「既知の真理の配列(taxis,ordo)」とを連結させたことによる。発見には、分析と統合の二つの過程が含まれるが、解析・分析(analysis)は論理学と数学において異なった発展を遂げた。ヴィエトにおいて、代数と解析は同じものとなり、同時に解析法は、代数的な発見技法と同義となる。ライプニッツは、ヴィエト及びデカルトの代数的幾何学を継承し、代数学の場面で発達した発見をすべての事象に適用することを望み、発見技法を普遍化しようとし、結合法、普遍記号学、一般学に展開した。→普遍記号法
＜文献＞M.S.マホーニィ（佐々木力訳）『歴史における数学』勁草書房,1982　」

発見に対応するものは、仮説的な推論、蓋然的な推論（これを発見的な推論とも呼んでいる）、詭弁的命題等に関わるもの。ラムスの「発見技法」は、「既知から未知のものの推論」と「既知の心理の配列」を連結させたものだという。

また、ライプニッツは、ヴィエト、デカルトの代数的幾何学を継承し、代数学の場面で発達した発見をすべての事象に適用させ、普遍化しようと試みた。

このあたりはポリアにも引き継がれているようにみえる。

ラテン語「ars inveniendi」（発見技法）については、ポリアの上記箇所を原文でたどることでわかる。

「　*Heuristic, or heuretic, or “ars inveniendi” was the name of a certain branch of study, not very clearly circumscribed, belonging to logic, or to philosophy, or to psychology, often outlined, seldom presented in detail, and as good as forgotten today. The aim of heuristic is to study the methods and rules of discovery and invention….*
Heuristic, as an adjective, means “serving to discover.”　」

G.Polya, How to solve it, 1945, pp.112-113

彼は「Heuristic」を「ars inveniendi」（発見技法）とほぼ同義と捉えているのがわかる。

また、ポリアは、デカルトが『精神指導の規則』[x]で示そうとした「問題を解く普遍的方法」に強い関心を示した。デカルトがあらゆる型の問題に適用できると期待した式は次のとおりである。

「第一、どんな種類の問題も数学の問題に引きなおせ。
　第二、どんな種類の数学の問題も代数の問題に引きなおせ。
　第三、どんな代数の問題もただ一つの方程式を解くことに引きなおせ。」

　こうしてデカルトをはじめとする哲学者のあとを継いで、ポリアは「問題を解く普遍的方法」について考えていくことになる。

『数学の問題の発見的解き方　第１巻』p. ii より
「デカルトはすべての問題を解く普遍的方法に思いをこらし、ライプニッツは完全な方法というアイデアを非常に明白に定式化した。しかし、かつて卑金属を黄金に変えると思われた哲学者の石の探求が成功しなかったように、普遍的で完全な方法の探求もまだ成功していない。; 世の中には、夢のままで終わらねばならぬような偉大な夢があるものなのだ。それにもかかわらず達成されなくても、このような理想は人々に感化を及ぼすであろう：まだ北極星に行った人はないけれども、この星を見て正しい進路を発見した人は多いのだ。本書は貴方がたに問題を解く普遍的で完全な方法を提供することはできない（また、今後とも、そういう本は決して出ないであろう）が、たとえ達成されなくても、少しでもその理想に向かって進むことは、貴方がたの精神を清澄にし、貴方がたの問題解決能力を増進させるであろう。」
…
「本書で試みる、問題解決の手段方法についての研究を、私は発見学(heuristic)と呼びたい。発見学という言葉は、かつて哲学者の中に用いた人もあったが、今日では半ば忘れさられ、その価値も半ば疑われている。しかし、私はあえてそれを用いる。」

　また、シェーンフェルド[xi]によると
「Once nearly forgotten, heuristics have now become nearly synonymous with mathematical problem solving.※
Heuristic strategies are rules of thumb for successful problem solving, general suggestions that help an individual to understand a problem better or to make progress toward its solution.～」「※ Curiously, that synonymy takes place only within mathematical problem solving. In other problem-solving domains such as AI, the term heuristics has been revived, but is generally used to refer to procedures such as means-ends analysis. In fact, heuristics of the type Polya describes are not held in high esteem in AI. There are interesting reasons for this, but a discussion of them would take us far afield.」

　忘れ去られてしまった発見学は、いまではほとんど数学的問題解決と同義になってきたという。　また、AI（人工知能）の研究の一分野でも heuristics という言葉が復活しているというのである。

これらのことから、

① 発見学の目的は、発見や発明の方法を研究すること
② 論理学・哲学・心理学などに属する研究で言及されている
③ 問題解決の普遍的で完全な手段方法についての研究（ポリアによる）
④ いまでは、数学的問題解決とほぼ同義になってきている
⑤ 同じ言葉が人工知能研究の分野にも使われるようになっている

のように発見学を捉えることができる。

(2) ヒューリスティクス（発見法）とアルゴリズム

(a)アルゴリズム

よく認知科学や人工知能などで使われることばであるが、ここではS・クルーリックの著作[xii]を参照した。

「 ほとんどの算数・数学の教科書には「言葉の問題」とレッテルを貼られた節が設けられているけれども、どれもが実際に問題というわけではない。多くの場合、モデルとなる解決がすでに教師によって学級で提示されている。児童・生徒は、一連の類似「問題」を解決するために、単にこのモデルをそれらに適用するだけである。本質的にはその児童・生徒はアルゴリズムを学習しているのである。——アルゴリズムとは、１種類の「問題」へ適用する技能のことであって、しかも、機械的な誤りさえ避けられるならば成功を保証するような技能のことである。これらのいわゆる問題のうちのいくつかは、児童・生徒による高次の思考を必要とする。ただし、児童・生徒がこれらの「言葉の問題」を最初に見るときには、それらは児童・生徒にとって実際に問題となるかもしれない。

これらの「言葉の問題」は「練習問題」または「型どおりの問題」といえる。このことは、それらをカリキュラムからはずすことを支持するというのではない。それらはある目的のために役立っており、その目的のために、それらはそのままにしておくべきである。それらは問題状況にさらすことや、アルゴリズムを使う練習や、数学的処理のいくつかを結びつけたドリルを提供してくれる。しかし、児童・生徒たちが注意深く展開されたモデルやアルゴリズムを使ってこれらの型どおりの練習問題を解決しているとき、教師は彼らが問題解決にさらされているのだと考えるべきではない。」

アルゴリズムとは、きまったやり方でやれば、必ず解答に至るようなやり方である。また、いろいろな問題に対して汎用性もあまりなく、特定の問題にのみ適用できるものが多い。

(b) 発見的方法 (ヒューリスティクス)

ヒューリスティクスとアルゴリズムは対比されて用いられる言葉である。

もう一度、S・クルーリックの著作から引用する。
「アルゴリズムとは同一種類の問題に適用できるような技法のことであると私たちは定義した。アルゴリズムは、それが正しく適用され、しかも算法上の誤りや機械的な誤りを犯さないならば、成功を保証するものである。他方、「発見的方法」（ヒューリスティクス）とは、私たちが問題を解決するのを助けるために用いられる創造的な指針のことである。それは示唆の集まりであって、成功を保証するとは限らない。さらに、それらはアルゴリズムよりもはるかに一般的である——つまり、それらは１種類または一つの型の問題にのみ適用されるものではない。

本質において、発見的方法は一般的な方策であり、特殊な論題とは無関係であって、個々人が問題にアプローチしたり、問題を理解したり、その問題の解決に達したりするのを助けるために、従うべき示唆のことである。特殊な問題を解決するための技法は発見的方法とみなすべきではない。例えば、２変数をもつ２つの連立方程式を解くとき、一つの変数を消去し、そして、その連立方程式を一変数の単一な方程式に還元しようと試みる。たとえ n 変数をもつ n 個の方程式について、変数の個数を(n－1)個へ、方程式の個数を(n－1)個へと還元することによって、この過程を一般化するとしても、私たちはいまだ、発見的方法というよりむしろ、アルゴリズムについて語っているのである。それは n 変数をもつ n 個の方程式に関する仕事だけにかかわりをもっているにすぎないからである。」

・・・「発見的方法を適用することはそれ自体難しい技能である。各々の発見的方法をどのように（そして、いつ）用いるかということを児童・生徒に示すには、時間をかけなければならない——それは単なる記述的アプローチというよりもむしろ、規範的なアプローチである。児童・生徒に問題を解決させるとき、私たちが常に発見的方法を用いるようにしたり、それらに言及したりするのである。」

(3) 発見法とストラテジー

ポリアは『いかにして問題をとくか』の裏表紙に以下のリストを記載している。

G．ポリア（垣内賢信訳）,1955,『いかにして問題をとくか』,丸善

第１に 問題を理解しなければならない	問題を理解すること ◇未知のものはなにか。与えられているもの（データ）は何か。条件は何か ◇条件を満足させうるか。条件は未知のものを定めるのに十分であるか。又は不十分であるか。又は余剰であるか。又は矛盾しているか。 ◇図をかけ。適当な記号を導入せよ。 ◇条件の各部を分離せよ。それをかき表すことができるか。
第２に データと未知のものとの関連を見つけなければ	計画を立てること ◇前にそれをみたことがないか。　又は同じ問題をすこしちがった形でみたことがあるか。 ◇似た問題を知っているか。役にたつ定理をしっているか。 ◇未知の物をよくみよ！そうして未知のものが同じか又はよく似ている、みなれた問題を思い起せ。

ならない。 　関連がすぐにわからなければ補助問題を考えなければならない 　そうして解答の計画をたてなければならない。	◇似た問題で，すでにといたことのある問題がここにある。 　それをつかうことができないか。 　その結果をつかうことができないか。 　その方法をつかうことができないか。 　それを利用するためには，何か補助要素を導入すべきではないか。 ◇問題をいいかえることができるか。　それをちがったいい方をすることができないか。定義にかえれ。 ◇もしも与えられた問題がとけなかったならば，何かこれと関連した問題をとこうとせよ。 　もっとやさしくてこれと似た問題は考えられないか。 　もっと一般的な問題は？　もっと特殊な問題は？　類推的な問題は？ 　問題の一部分をとくことができるか。条件の一部をのこし，他をすてよ。 　そうすればどの程度まで未知のものが定まり，どの範囲で変わりうるか。 　データをやくだてうるか。 　未知のものを定めるのに適当な他のデータを考えることができるか。 　未知のもの若しくはデータ，あるいは必要ならば，その両方を変えることができるか 　そうして新しい未知のものと，新しいデータとが，もっと互いに近くなるようにできないか。 ◇データをすべてつかったか。条件をすべてつかったか。 　問題に含まれる本質的な概念はすべて考慮したか。
第３に 計画を実行せよ。	計画を実行すること ◇解答の計画を実行するときに，各段階を検討せよ。 　その段階が正しいことをはっきりとみとめられるか。
第４に えられた答を検討せよ。	ふり返ってみること ◇結果をためすことができるか。議論をためすことができるか ◇結果をちがった仕方でみちびくことができるか。 　それを一目のうちに捉えることができるか。 ◇他に問題にその結果や方法を応用することができるか。

ポリアはこのリストを、「数学的な考え方」とも、「問題解決ストラテジー」とも呼んでいない。 後の人々がこのポリアの考えを「ポリアのstrategies」などと言うようになったが、シェーンフェルドは、著書[xiii]の中で「Heuristic strategies」という言葉を用いていた。「発見の役に立つストラテジー」ということである。

算数・数学教育における問題解決ストラテジーを大須賀康宏・石田淳一[xiv]は、「当面する問題を解決しようとする場合に、助けとなる問題解決の全般的な手順や解法発見の手がかりを与える方法」と捉えている。

問題を解くことができないのは、解法を発見する前段階としての「手がかり」が掴めないためであり、その手がかりを与える方法が問題解決ストラテジーである。

第二章 問題解決方略に関する先行研究

第一節　問題解決方略

2-1-1　問題解決方略

(1)定義

横山[xv]は、問題解決ストラテジーを「解法の中で主要に用いられる考え方や解決の方法」と定義している。シェーンフェルド[xvi]は、「もし、あるやり方が２度目もうまくでき、そのやり方をうまく使ったことを思い出して、別の似た問題それを使ってみようと考えたときに、そのやり方(method)は方略になる」と述べている。

彼らをはじめとする多くが、問題解決ストラテジーを定義しているが、本稿では、「手がかりを掴むため」の問題解決ストラテジーの役割も重視し、「当面する問題を解決しようとする場合に、助けとなる問題解決の全般的な手順や解法発見の手がかりを与える方法」と定義することにする。

さまざまな研究者がストラテジーとして挙げる内容は多岐にわたり、統一されていない。数も相当なものになる。古くから問題解決ストラテジー指導を実践的に研究している愛知県幸田小学校[xvii]では、Lenchner[xviii]の文献にある１２個のストラテジーから、７つのストラテジーを選択し発達段階を考慮しながら指導している。

Lenchner のストラテジー
① 整理されたリストを作る
② 絵や図をかく
③ パターンを見つける
④ 表を作る
⑤ 簡単な場合から考える
⑥ 試行し検討する
⑦ 実演（劇化）する
⑧ 実験する
⑨ 逆向きに考える
⑩ 方程式を作る
⑪ 観点を変える
⑫ 演繹的に考える

幸田小７つのストラテジー
① 試行し、検討する
② 絵や図をかく
③ パターンを見つける
④ 表を作る
⑤ 整理されたリストを作る
⑥ 簡単な場合から考える
⑦ 逆向きに考える

(2)二つのタイプ

布川[xix]は、問題解決ストラテジーを、「解法的ストラテジー」と「分析的ストラテジー」の二つの型としてとらえている。解法的ストラテジーを「解法における主要な考え方」とし、分析的ストラテジーを「困難な状況解消のための手だて」ととらえている。

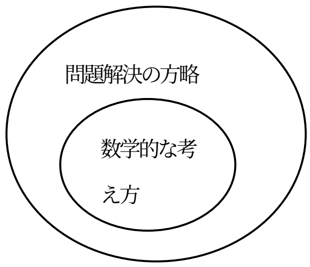
また、布川以外にも多くが、「問題を解決する際の計画や手順に関するもの」と「それらの計画や手順を実行するときの具体的な方法に関するもの」といった二つのタイプに分類している。

(3)数学的考え方との関連

a) 包含関係

小林ら[xx]は、以下のように捉えている。

「「数学の考え方」とは、数学を生成・発展させていく過程にあらわれる考え方であり、その過程を、(1)数学の問題を開発する、(2)それを解決する、(3)知識を体系化することの３つの場面としてとらえられる。一方、「問題解決の方略」とは、問題を解決する際の構想、着想、方策（手立て）といったもののことをいう」ととらえると、両者は図のような包含関係にある。」

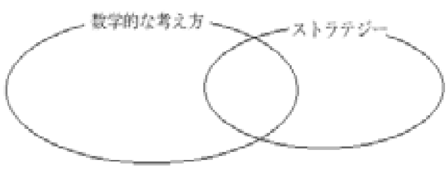


b) Ａ∩Ｂの関係

片桐重男は、『数学的な考え方の具体化』[xxi]の中で、G.L.Musser & J.M.Shaughnesseyのstrategiesに触れながらこう述べている。

「このストラテジーには、数学的な考え方の特徴と同じものがいくつも示されているし、また表現は異なっていても「あの数学的な考え方と同じだ」と読み直せるものが多くある。しかし中には、考え方とは考えられない、単なる技能、手順とみられるものもある。

したがって、数学的な考え方とストラテジーとは、次のような関係のものとみられる。」



c)

しかしながら、数学的考え方と問題解決方略とは別のものである。ストラテジーとは、問題に対して発見的にアプローチするものである。数学的な考え方は、そのストラテジーを含むものであったり、ストラテジーに含まれるものであることもある。ときには、全く別のものでもあったりする。含むか含まれるかといったことは簡単には定義しにくい。

清水克彦[xxii]は、方略を「児童が問題を解決する際にとったさまざまな行動をカテゴリー化したもの」ととらえ、「数学的な知識技能は、そのままでは、単なる概念だが、児童の主体的な問題解決のなかに現れたとき方略となり、問題解決能力を形成するものとなる」と述べている。

数学的な考え方を問題解決のときに用いたものがストラテジーになることはあるが、包含関係については敢えて定義しないことにする。

2-1-2 スキーマとストラテジー

(1) 問題解決スキーマ

OwenとSweller[xxiii]は、認知心理学からの研究をふまえながら、問題解決のエキスパートとノービスとで最も異なるのは、当該領域についてのスキーマ（schemas）を持っているかどうかであり、エキスパートの問題解決活動の特徴は、このスキーマを持っていることで説明できるとした。ここでスキーマとは、「問題が属するカテゴリーと、そのカテゴリーの問題にとって最も適切な行動(moves)の双方を特定するような、認知構造として定義される」ものである。

彼らは、多くの研究が、一般性を持つストラテジーよりも、領域に固有なスキーマの獲得により問題解決が促進されることを示していることから、ストラテジーの指導にあまり期待すべきではなく、むしろ領域に固有な詳細な知識の獲得を通して、こどもの問題解決の向上を目指すべきだと述べた。

(2)スキーマとストラテジー

それに対して、本来の意味での転移において、役割を果たすほどに、ストラテジーは一般的な性格を持っていると考えられている。スキーマに基づく問題解決能力は、非常に限られた範囲でしか適用できない。例えば、新たな知識を獲得するような場面で古い知識をどのように用いるかといったことには、スキーマでは対処できないのではないか、という批判がLawson[xxiv]によってなされている。

しかし、実際に一般性のある転移があることを示そうとするのであれば、指導で獲得されたストラテジーは全く関連のない(quite unrelated)問題に適用できなければならないのに、スト

ラテジーの指導の効果を調べた研究においては、そうした側面を測るようにテスト問題をつくることに十分注意が払われていない、とSweller[xxv]は指摘した。

つまり、Lawson は関連のない問題にも適用できる程度に一般性を持つという点で、ストラテジーがスキーマと異なるとしたのに対し、これまでのストラテジーの指導に関する研究では、まさにその点に対する注意が十分ではないと Sweller は指摘したのだった。

もし、そのような指導のもとで獲得されたストラテジーでは、関連のない問題に適用される保証は得られないことになり、ストラテジーの優位性も保証されなくなってしまう。

(3) ストラテジー指導のアルゴリズム化

こういったことを考えていくと、ストラテジーの指導によって成績が向上したのは、「問題のタイプの知識」（ある問題に対して、この共通の定式化に関わる知識）(石田[xxvi])とそのタイプの問題に対する答えを求めるための手続きが獲得されたからだということになる。

「問題のタイプの知識」と答えを求めるための手続きとを一緒に考えると、これは、問題のカテゴリーを特定し、しかもその問題に対して適切な行動をも特定するという意味で、Owen と Sweller が述べるスキーマの規定を満足することになる。このことから、ストラテジーを指導しようとしながら、実際には、ある種のスキーマを形成している疑いがあるのである。

StanicとKilpatric[xxvii]は 1980 年代の問題解決の指導を振り返り、以下のような反省をしている。

「ヒューリスティックスは技術(skill)に、テクニックに、そして逆説的なことにアルゴリズムにすらなっている。」

数学教育において、「問題解決ストラテジーとヒューリスティクスとが同義である」(Schoenfeld[xxviii])ということからみても、これは問題解決ストラテジーについての指摘と考えられ得る。

(4)ストラテジーとスキーマの補完関係

布川[xxix]は、以下のように述べている。

「元来、問題解決では答えを見出すのにいつでも使えるようになっている手法をまだ持っていないことが、条件として要求されていた。しかし、スキーマでは、少なくとも当該スキーマで扱われるカテゴリーの問題に対しては、すぐに使える手法が含まれている。つまり、スキーマの指導は、子供にとってノンルーチンな問題をルーチンな問題にする試みと見ることができる。

・・・

ここまで考えを踏まえれば、問題解決におけるスキーマの果たす役割を考えながら、なおストラテジーの一般性を保証するために見慣れない状況を既有のスキーマの中に取り入れていく過程で有用なプロセスを、新たにストラテジーとして取り出すことが、ストラテジーを考える

際の新しい方向性になる。
　つまり、問題のタイプに応じてストラテジーが存在するのではなく、見慣れない状況で、ある問題と既有のスキーマとの関係性の上で、ストラテジーが議論されることになる。」
　したがって、ストラテジーをいかに使うかは、経験として積み上げたスキーマにかかっている。また、既有のスキーマで及ばない問題に関しては、既存のスキーマをうまく使いながらストラテジーによって補完するか、もしくは、ストラテジーによって切り崩すなかで、既有のスキーマとの結合を探っていくのである。

　このことから分かることは、ストラテジーを知識として習得しても、初めてみるような問題を解決しようとする際の役には立たないということである。私たちは、何らかの問題解決の経験から類推して、ストラテジーを用いている。つまり、問題解決を通して何らかのスキーマを作り上げていくことが必要になるのである。

第二節 問題解決方略指導に関する先行研究

2-2-1 ストラテジーの発見学習と有意味受容学習

(1) 発見学習と有意味受容学習

　ここまで、問題解決ストラテジーとはどんなものか、様々な観点から述べてきた。それでは、どのようなストラテジーの指導方法が有効なのであろうか。学習心理学では、発見学習と有意味受容学習がよく知られており、以下のように定義されている。[xxx]
「有意味学習の成立は、学習者の認知構造に関連付けを与えるように学習材料を提示するかどうかに依存しており、この関連付けを与えるにはどのような教授法を採用すればよいのか、についての見解には対立したものがある。その１つは、発見学習を積極的に推奨するブルーナー(Bruner,J. S.)に代表されるものである。彼は、学習者が自分で探求的に問題を解決することを通じて学習すべき内容が認知構造の中に位置すると考えられる。これに対して、オースベル(Ausubel, D. P.)は、具体的な操作期以降においては、膨大な有意味な言語的内容を個人に学習させるのに、発見学習を用いることは一般に不必要であり、不適切であると考える。発見学習は多くの場合、動機付けの点でもすぐれ、学習内容の理解・把持が優れていることは認めるが、それらの特徴は教師による言語的な提示によっても十分可能であると考える。この教授法が有意味受容学習である。この教授は学習されるべきすべての内容が明瞭に最終形態として提示されるものであり、学習者はその内容を各自の認知構造に関連付けながら、受容していくのである。」
「（発見学習において）自分で発見したルールは転移が大であるか、発見学習により獲得された知識は把持されやすいかなどの点についても、他の学習方法との比較実験がなされてきたが結

論は出ていない。

・・・

いかなる特性をもった教科で、どの発達段階のこどもに、どんな反応を学習させるときに、発見学習が有効なのか、また、他の学習方法との組み合わせ方などの研究が必要である。」

このような指摘は、学習指導一般に関するものであるが、問題解決ストラテジーの指導においても、発見的な学習と受容的な学習の差異を比較検討する必要がある。

(2) 横山正夫氏の研究事例

横山[xxxi]は、小学校６年生を対象に、指導方法の異なる説明的指導プログラムと発見的指導プログラムにより、問題解決ストラテジーの指導をし、その指導効果を調べた。

説明的指導プログラム（８時間）

① 特徴：最初に例題をもとにストラテジーを教え問題にあてはめさせる。（ストラテジー→問題）

② 内容：：４ストラテジーを各２時間ずつ指導し、例題→ストラテジーの説明→問題へのあてはめ→ストラテジーを用いた問題の解決→ストラテジーの使用の確認→まとめ，という構成とする。

発見的指導プログラム（８時間）

① 特徴：最初に問題を与え、問題を解く過程で多様なストラテジーを発見させる（問題→ストラテジー）

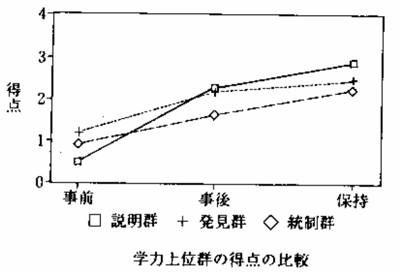
② 内容：説明群と同様の問題を使用し、問題→各自の方法による問題の解決→解決方法への振り返り→多様な解決方法をストラテジーとしてまとめる、という構成とする。

表-9 学力上位群の得点の平均と標準偏差

指導群	時期	N	$\bar{X}$	SD
説明群	事前	10	0.50	0.67
	事後	10	2.30	0.64
	保持	10	2.90	0.53
発見群	事前	10	1.20	1.07
	事後	10	2.20	1.07
	保持	10	2.50	1.02
統制群	事前	12	0.91	0.95
	事後	12	1.66	0.94
	保持	12	2.25	1.08

学力中位群の得点の平均と標準偏差

指導群	時期	N	$\bar{X}$	SD
説明群	事前	7	0.28	0.45
	事後	7	1.42	1.04
	保持	7	1.14	1.12
発見群	事前	7	1.00	0.92
	事後	7	1.85	0.98
	保持	7	2.28	1.16
統制群	事前	7	0.57	0.72
	事後	7	0.28	0.69
	保持	7	1.00	0.53



学力上位群の得点の比較

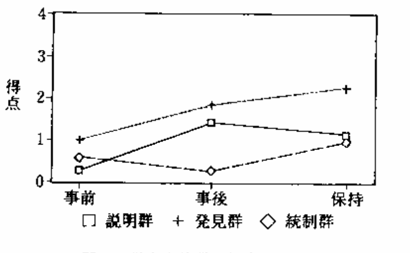


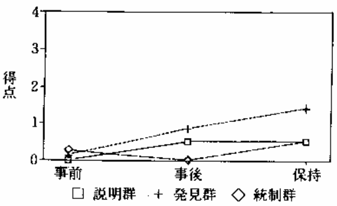
図-4 学力中位群の得点の比較

「 この結果、学力上位群では、説明群・発見群・統制群ともに得点が向上した。学力中位群では、説明群・発見群ともに得点が向上したが、統制群では変化しなかった。学力下位群では、発見群のみ得点が向上し、説明群・統制群では変化しなかった。

学力上位群は、ストラテジー指導が行われなくても自力で問題解決ができたと考えられる。学力中位群では、ストラテジー指導が有効であったが、指導方法による差はなかったと考えられる。下位群では、説明的な指導ではストラテジーの理解が表面的であったと考えられる。それに比べて発見的な指導では、自己の奇襲知識や経験と関連させながら、問題解決ができたと考えられる。」（再び横山）

学力下位群の得点の平均と標準偏差

指導群	時期	N	$\overline{X}$	SD
説明群	事前	8	0.00	0.00
	事後	8	0.50	0.50
	保持	8	0.50	0.50
発見群	事前	7	0.14	0.34
	事後	7	0.85	0.83
	保持	7	1.42	1.29
統制群	事前	8	0.25	0.43
	事後	8	0.00	0.00
	保持	8	0.50	0.70



学力下位群の得点の比較

しかしながら、布川[xxxii]によると、「例えば、横山(この指導事例)の逆向きに考えるストラテジーの事後テストの問題は試行検討のストラテジーによっても解決可能であるにも関わらず、彼の示すデータによれば、こうした手続きをとった子供はいない。あるいは、整理されたリストを作るストラテジーの事後テストの問題に対して、簡単な場合から考えるストラテジーの（場合分け）を適用することも可能であるが、こうした手続きをとった子供も報告されていない。」

つまり、この問題のカテゴリーを特定し、しかもその問題に対して適切な行動までも特定してしまっている。ストラテジーを指導しようとしながら、ある種のスキーマを形成している疑いがある。

いずれにしても、「スキーマとストラテジーの指導」は、上位群では説明的な授業でも発見的な学習でも関係ないが、下位群では発見的学習のほうが効果があるのは確かである。

2-2-2 問題解決方略の使用過程に関する上位下位分析

石田[xxxiii]は、問題解決方略の指導を３年間受けた小学校６年生（愛知県額田郡幸田町立幸田小学校）を対象に問題解決テストを行い、その成績に基づいて抽出された上位群と下位群の子供の問題解決過程について、以下のような結果をまとめた。（「パターン発見」方略の使用過程）

① 下位群は上位群よりも「パターン発見」方略の選択自体が少なかった。
② 図形の規則性発見問題の解決過程において、上位群の「パターン発見」方略の実行手続き（順序よく調べて、変わり方のきまりを見つける手順）はルーチン化されていた。
③ 図形の規則性発見問題の解決過程において、素朴な解決方法を見直して効率的な解法を工夫する中で図の構造に着目してパターンを発見し、それを解決に利用する子供が下位群に見られた。
④ 文章題の解決過程において、上位群同様に下位群の「表を作る」方略の実行手続き（条件に合う場合を順々に調べる手順）はルーチン化されていた。

⑤　文章題の解決過程において、「パターン発見」方略を使用するために、変化のパターンが現れるように新しい変数を探索する子供が上位群に見られた。

⑥　下位群の子供は不適切な方略を選択すると適切な方略に変更することが困難であった。

これらの結果から、問題解決方略の指導方法の改善にあたって、次のようなことを述べている。

① 問題解決方略の指導は数学的な見方・考え方の指導と関連づけて行う。

②「評価・改善」活動を重視した問題解決方略の指導を行う。

③ いろいろなパターンを見つけることができるように指導する。

④ パターン発見のために新しい変数を設定することを指導する。

⑤ 見つけたパターンの意味を考えることを指導する。

①では、「「パターン発見」方略を使って問題を解決するには、どんな問題場面でその方略を使用したらよいかわらかなければならない。そのためには、「パターン発見」方略の使用の背後には「依存関係にある数量を特定して、その数量の変化や対応の規則性を調べることにより問題を解決する」という「関数的な考え」があることを理解できるように指導することが大切である。」と説明されている。

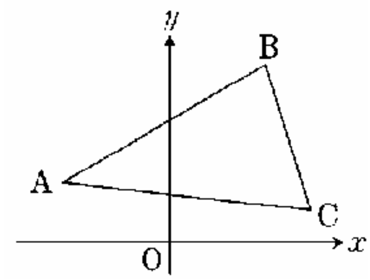
第三章　スキーマ形成とストラテジーの転移

第１節　幾何学的表示によるスキーマ形成の考察

3-1-1 三角形の面積を２等分せよ～その１～

(1)①次の問題を考えてみる［**未知のものは何か**］

［問題１］
Ａ（－４，０），Ｂ（４，８），Ｃ（６，１）
であるとき、点Ｃを通って、△ＡＢＣの面積を
２等分する直線の式をもとめなさい。



まず、何を求めるのか［**未知のものは何か**］。ここでは、C を通り、ＡＢと交わる直線の方程式である。ここではその直線を*l* とよぶ。直線*l* と線分 AB の交点を P(X,Y)と置くことにする。この直線*l* の式が求めたい未知数（未知のもの）である。

私たち(problem solver)の精神状位は、右図のように直線*l* と記した一個の点によって表される。私たちの注意全体はこの一点に集中されなければならない。

○直線*l* の式

② しかし、何も与えられていないなら未知のもの（直線*l*）の式は求めることができない。

「**データは何か？**」あるいは「**手もとにあるものは何か？**」と、自問するだろう。

そして我々の注意は三角形の３つの頂点Ａ（－４，２），Ｂ（４，８），Ｃ（６，１）を強調する。

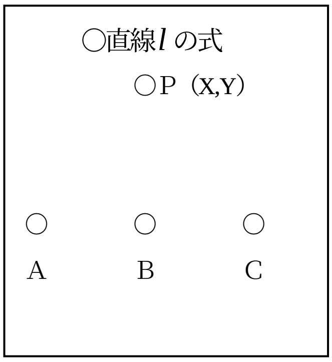
すると、こんどは、右図のなかに、Ａ，Ｂ，Ｃと記された３つの新しい点が現れる。これらはデータを表示し、未知数（直線*l*）とは間隙、開いた空間で隔てられている。この開いた空間は未解決の問題を象徴する。

我々の問題は、未知のもの（直線*l*）とデータＡ，Ｂ，Ｃとの連結を目標としている、この間隙に橋をかけねばならない。

○直線*l* の式

○ ○ ○
A B C

③ 直線*l* はどのような形で表せるか。またその際には、何が必要になるだろうか。
直線*l* が点Ｃを通ることは分かっている。直線は、もう一方の点があって初めて一つに定まる。



したがって、直線lと線分ＡＢとの交点をＰ（Ｘ，Ｙ）とおくことにする。つまり、次の図のようにＰ（Ｘ，Ｙ）という点が精神状位の中に現れてくる。

ここまでくると、直線lの式は仮に立てることができる。

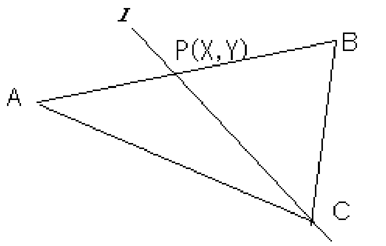
Ｐ（Ｘ，Ｙ）とＣ（６，１）を通るから、

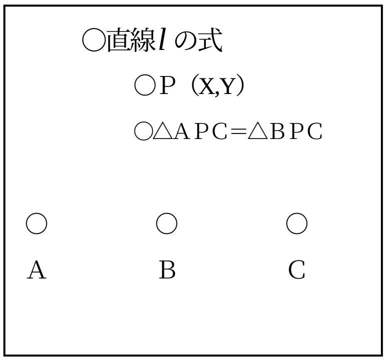
$$y-1=\frac{Y-1}{X-6}(x-6)\quad\cdot\cdot\cdot(※)$$

となる。

④ こうすると、問題は、△ＡＰＣと△ＢＰＣの面積の比較となる。やっと条件が揃ったようである。

ポリア流のダイアグラムでは、この条件はどこに入るのだろうか。仮に図のように入れておくことにする。





また、文字が絡む場面を減らす意図で、

２△ＡＰＣ＝△ＡＢＣ

としたほうがいいかもしれない。

これで問題を△ＡＰＣと△ＡＢＣの面積をそれぞれ求めるという部分に分けることができる。この上で、両者の関係をつなげばよい。

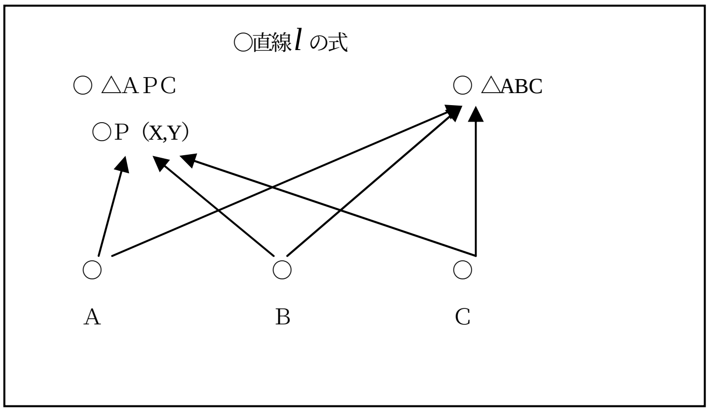
△ＡＢＣ、△ＡＰＣの面積は、座標平面上の三角形の面積の公式

三角形の頂点を　$A(a_1,a_2),B(b_1,b_2),C(c_1,c_2)$とするとき

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\left|a_1b_2+b_1c_2+c_1a_2-a_2b_1-b_2c_1-c_2a_1\right|$$

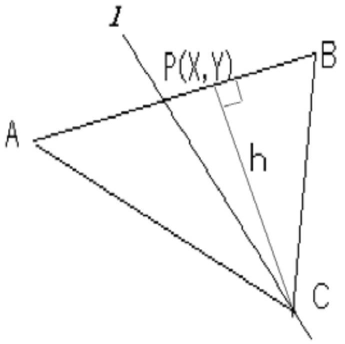
などを用いれば、なんとか求められそうだ。(中学生には範囲外かもしれないが)

おそらくＸとＹの式になるだろうから、(※) の式と連立させることになるだろう。



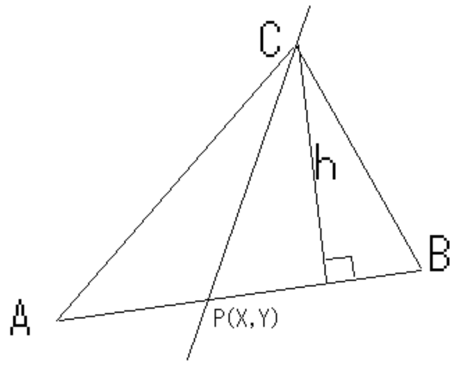
⑤　ところで、もう少し、簡単に出せないだろうか。

このままでも確かに解けるけれども、この問題に特化した解き方があるかもしれない。
条件をもっと絞り込めないだろうか？



「飛び石となる補助図形をさがせ」

ここで図のように点Cから線分 AB に垂線 h を引いてみる。もう少し見やすいように逆さまにしてみると・・・。



右の図のようになり、△ABC と△APC は高さを共有しているのがわかる。

すると、△APC と△ABC の面積比は、底辺比に帰着される。

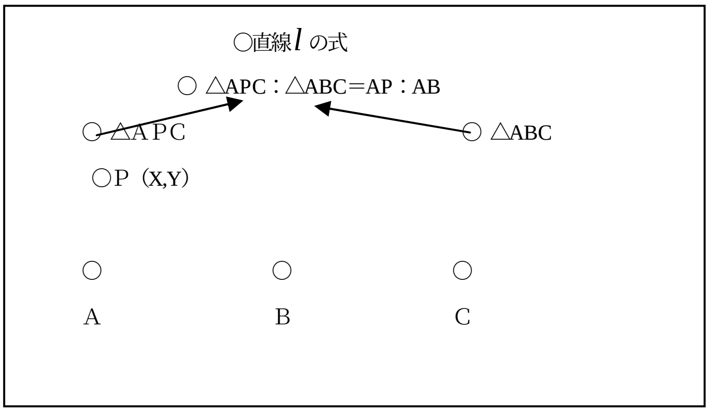
△APC：△ABC＝AP：AB

「条件の一部を残し他を捨てよ」

２次元の面積比を１次元の線分比に落とすことができた。

面積比（条件）の一部（高さ）を固定し底辺比になおしたことになる。

このことは、３次、４次、５次・・・n 次というように、問題の次元を上げていっても、同様に条件を固定することで次元を落とし、解けるかもしれないという示唆を私たちに与えている。

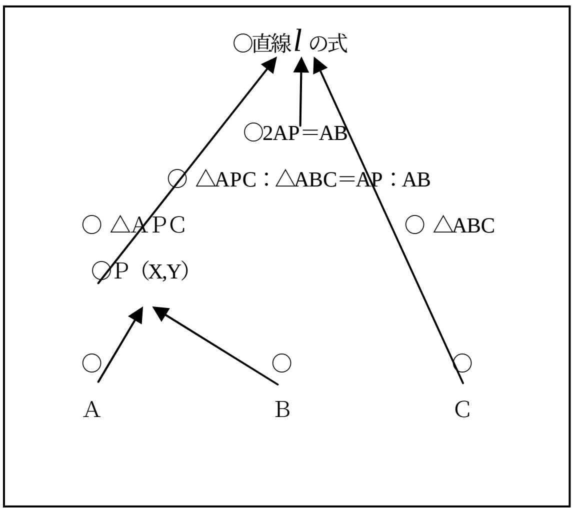


「視覚化せよ」

この底辺比に帰着させることは、実際に図に書いて初めて分かる情報である。つまり、視覚化せずに純粋に代数のように解くことはとても難しいことであることがわかる。

このあとは、条件　２△APC＝△ABC　より△APC：△ABC＝AP：AB　から導かれる底辺比は、

2AP＝AB となる。



⑥ したがって、点 P は点 A，B の中点であるから、

$$P\left(\frac{-4+4}{2},\frac{2+8}{2}\right)=P(0,5)$$

(※)式の（X，Y）に（0，5）を代入して

$$l：\quad y-1=\left(\frac{5-1}{0-6}\right)(x-6)$$

$$\therefore y=-\frac{2}{3}(x-6)+1$$

とすれば求めることができる。

(2) 解答の進行の幾何学的表示

① **○直線 l の式**

①～⑤の初段階を逐次見ていくと、問題解決者の注意が彼の探求する幾何図形にどのように及ぶか、彼がどのようにしてこの図形の計画の本質をなす連結の体系を一歩一歩作り上げていくかがわかる。その展開を検討すれば、その中に幾つかの相と活動を見出すことができる。

② ○直線 l の式

○ A　○ B　○ C

①から⑤では、下向きに、未知数からデータの方へ進んでいる。

先ず、①から②の段階で問題のアウトラインをつかもうと、第一の（大きな）トップダウンが起こっている。間にあるものは、空白であるが、**問題を理解・把握**しようとしている。

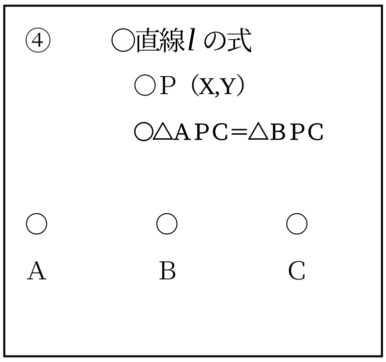
③ ○直線 l の式

○P（X,Y）

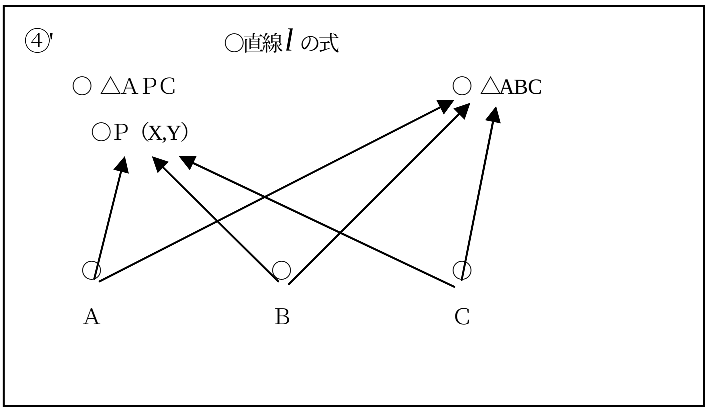
○ A　○ B　○ C

③、④、⑤では、掴んだ問題の概要をさらに細かく、（上から下へ）分化させて切り崩そうとしている。第二の（小さな）（ミドル）トップダウンとでも呼ぶのだろうか。**踏み石**となる**補助問題を探して、試行錯誤している**のがわかる。

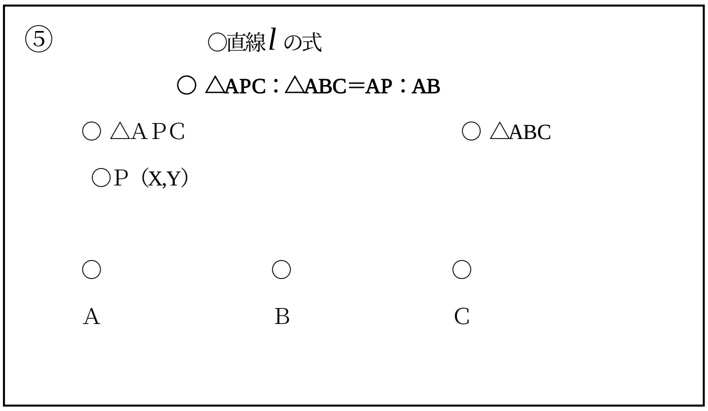
つまり③から⑤は論理的連結の体系を模索しながら、**解答の計画**を組み立てている。



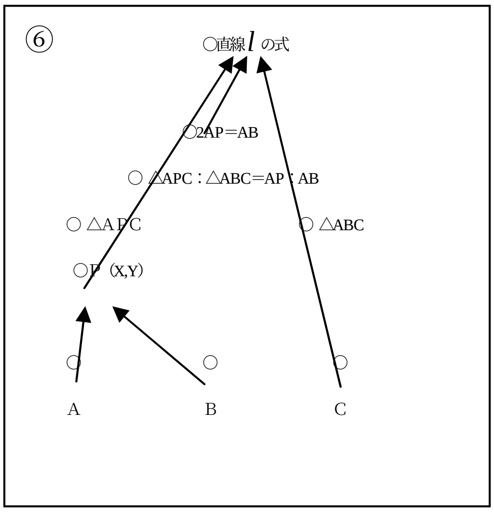
④の段階で、踏み石となる条件式をみつけることができた。
そこで、なんとか計算してみようと④'を試みようとする。しかし、**本当にこのままで解答にたどり着くのか、いやたどり着くとしても、もっとうまくできないだろうか。**
試しに④'のようにデータから△ＡＰＣと△ABC を求めようとしてみる。このとき、最下層の A,B,C からボトムアップ（演繹）の動きがみられる。



この演繹をしながら、モニタリング（気づき・感覚・予想・点検・評価）、コントロール（目標設定・計画・修正）といったメタ認知的活動を試みている。
その結果、**もう少しうまい方法があるのではないか**と、この方法を中断する。



④'の方法に挫折したあと、点 P を含む線分 AB が底辺、頂点 C の三角形に気づく。点 P を含む三角形 APC は、三角形 ABC とほとんどのものを共有している。
△APC の底辺 AP は△ABC の底辺 AB の一部であるし、斜辺 AC は完全に共有している。

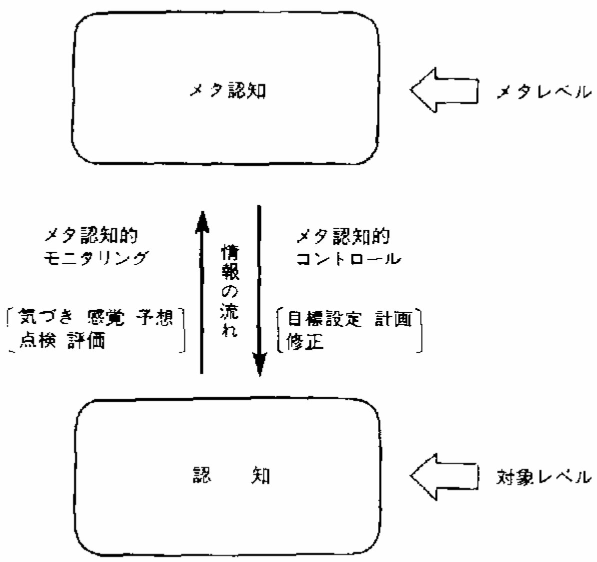


面積を決定づけるもう一つの要素は何であろうか。高さである。そこで高さを見つけようと、線分 AB に頂点 C から垂線 h を下ろしてみる。この補助線が、アイデアを決定づけることになる。
⑥になって、最後に計算（演繹）することになるが、使われる計算はわずかになる。
点 P を求めるためのデータは、点 A,B のみ。
直線lを求めるために、点 C と点 P を用いるだけである。図にしてみると、余計な線が随分減ったのがわかるだろう。

(3) 本例に見られる「ポリアの発見的方法」とメタ認知的活動

[問題 1]の解決の中で、ポリアの「いかにして問題を解くか」のリスト（発見学のリスト）にあるような方法を太字で示し、解決の過程を幾何学的に記した。ポリアのこれらの方法群と、この幾何学的表記は、本例のなかで何を示唆しているのだろうか。

①から⑤までの図で分かるように、問題を把握し、計画を立てる活動は、基本的に上から下へと進んでいく。予想を立てながら、妥当な論理的連結を図っている。ところが、いざ、その予想が正しいかどうかを試す段になると、時折、下から上への演繹的な動きが見られる。これは、予測が正しいか点検するために、具体的な演算を試行しているからではないだろうか。



メタ認知的活動のモデル（三宮，1995）

ネルソンとナレンス(Nelson&Narens,1994)[xxxiv]は、モニタリング（監視）とは、メタレベル(meta-level)が対象レベル(object-level)から情報を得ることであり、コントロールとはメタレベルが対象レベルを修正することであると説明している。この考えにもとづき作成したメタ認知的活動のモデル(三宮,1995)[xxxv]が､右図である。

メタ認知的モニタリングには､「ここが理解できていない」といった「感覚 feeling」､「この問題なら解けそうだ」といった予想(prediction)」､「この考え方でいいのか」といった「点検(checking)」､「よくできている」といった「評価(evaluation, assessment)」などがふくまれている。算数・数学でいえば、数を代入してみたり、特殊化してみたり、といった具体化など演繹的活動をはじめとする考え方、実証したり演算したりという活動がこの範疇に含まれるだろう。④や⑥の活動が中心になる。

また、メタ認知的コントロールには､「完璧に理解しよう」といった､認知の「目標設定(goal setting)」､「簡単なところから始めよう」といった方略をはじめとする「計画(planning)」､「この考え方ではだめだから、別の考え方をあてはめよう」といった「修正(revision)」などが含まれる。従って本例では、①から⑤の精神状位がここに当てはまるだろう。

ポリアは『いかにして問題を解くか』の中において問題解決の過程を以下の４つの相に区分している。

「第一に、問題を理解しなければならない。
　第二に、データと未知のものとの関連を見いだせ。直接の関連が見いだせないなら、補助問題を考えるべきかもしれない。そして、解決の計画を立てなければならない。
　第三に、計画を実行せよ。
　第四に、得られた解を検討せよ。」[xxxvi]

第一は、①・②。第二は、③～⑤。第三は⑥のようにそれぞれ当てはまっている。第四に該当するものは、ここでは例を挙げていないが、⑥'のようなものを作ることもできるであろう。

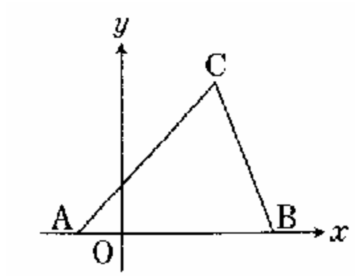
　また、ポリアは、この４つの区分に沿って、問題解決の様々な方針のリストを配置している。その中には一連の「発見法」や、難しい問題を解き進むための経験法(rules of thumb)が含まれている。この発見法のリストは、メタ認知的活動を推進する力(Guiding Forces)として働くだけでなく、問題意識をさらに深めていくための指針にもなっているように思われる。

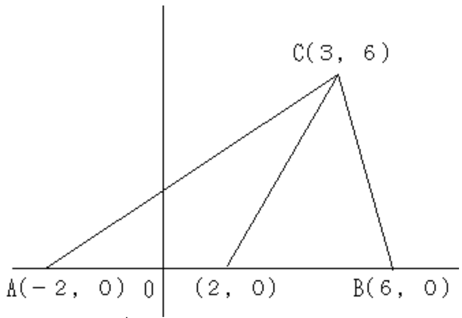
3-1-2 三角形の面積を２等分せよ～その２～

(1)

［問題１］では、面積比を底辺比に帰着させることで、うまく解くことができた。では、この方法が一番よいのだろうか。次の問題を考えてみることにする。

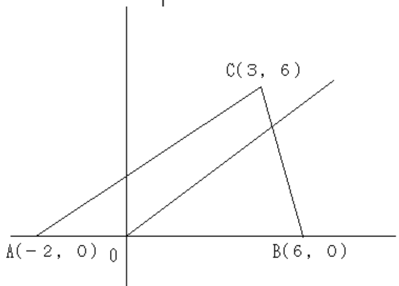
［問題２］
右の図で、３点 A, B, C の座標は、
（－２，０),（６，０),（３，６）である。
そのとき、原点 O を通り、△ABC の面積を
２等分する直線の式を求めなさい。





この問題では、底辺比が使えない。どうしたらいいだろうか。

底辺 AB は（２，０）が中点になるので、おそらく線分 BC 上に直線が交わるだろうと想像できる。
（逐次試行：手探りの状態）

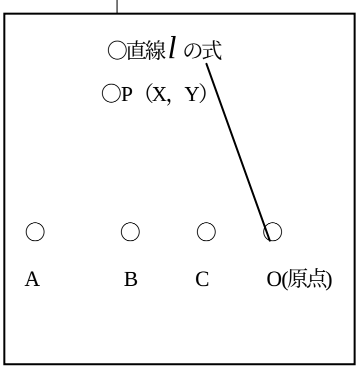


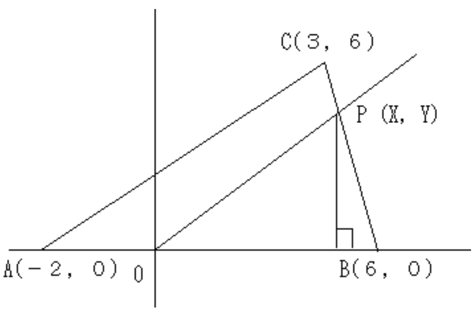
線分 BC と原点を通る直線（l とする）との交点をＰ（X，Y）とおくと＜未知のもの＞である l は、

$$l:\quad y-0=\frac{Y-0}{x-0}(x-0)\cdot\cdot\cdot(※)$$

とおける。

「補助要素を導入できないか」



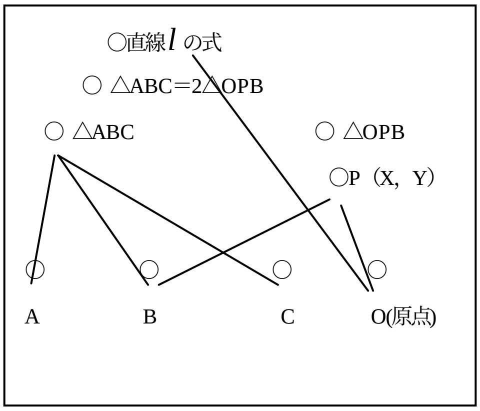


この問題では､底辺が x 軸に沿っているので､垂線（＝高さ）を引きやすい｡

高さは y 座標から､Y であることがわかる｡

右図のように精神上

位の中にデータ「O(原点)」が増えた。



△OPB の面積は分かりそうだ。（ただし、この問題特有のものである。より一般性のある解法は・・ということはあとで触れる）

同様に、頂点 C から垂線を下ろすことで、△ABC の面積も求めることができる。

従って、あとは△OPB と△ABC の比を求めればよいことになる。

△OPB，△ABC の面積は、それぞれ

$$\triangle OPB = \frac{1}{2} \times Y(\text{高さ}) \times 6(\text{底辺}) = 3Y$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6(\text{高さ}) \times 8(\text{底辺}) = 24$$

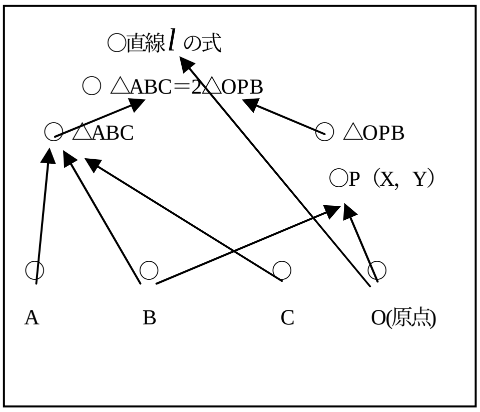
であるから、△ABC=2△OPB　より

24＝2×3×Y

∴Y=4

このあとは、線分 BC 上に点 P(X,Y)=(X,4)があることから X を求め、

（※）の式に(X, Y)を代入すれば直線lの式は求まる。



(2) ［問題 1］では、直線l は頂点Cを通っており、本例［問題 2］では、直線l が三角形の頂点を通ることがない。［問題 2］は、［問題 1］をより一般化したものである。

しかし、［問題 2］を決定的に解きやすくしていた要因は、直線l が原点で底辺と交わっていたこと、そして底辺が x 軸と重なっていたことである。この２題は、問題のもつ特殊性に気づくことで、より易しく解くことができた。ただし、［問題 1］を（ここで使われた）［問題 2］の解法で解くことも、［問題 2］を［問題１］の解法で解くこともできない。

では、より一般性のある解法を考えてみよう。

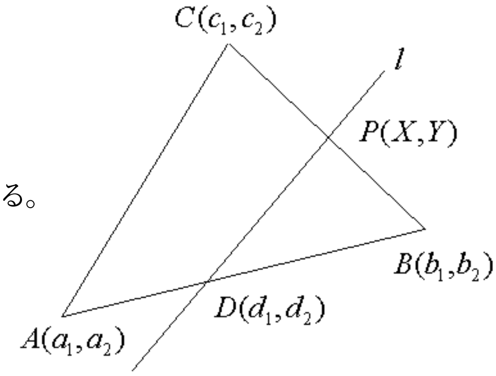
3-1-3 三角形の面積を２等分せよ〜一般化へむけて〜

(1) 一般式を求めよ

では、このような問題では、どうだろうか。

$A(a_1,a_2)$，$B(b_1,b_2)$，$C(c_1,c_2)$ のとき、

点 $D(d_1,d_2)$ を通って、△ABC の面積を
２等分する直線 l を求めよ。
ただし、直線 l は線分 BC と交わることにする。



この問題の答えである、直線の方程式 l と交点 $P(X,Y)$ を求めることができれば、いままで述べてきた二つの問題やその類似問題は、すべて公式化できてしまう。しかしながら、この解を手計算で求めるのは相当難しい。もし、私たちがコンピュータ並の計算力か、もしくは強い精神力の持ち主であればよいかもしれない。しかしながら、特殊化された個々の問題をそれに応じた解法で解いた方が便利そうである。

(2) アルゴリズムとヒューリスティクス

いま述べたような解法は、人間には向かないが、コンピュータによって処理すれば、なんとかなるかもしれない。このような実行すれば必ず解答に到達する（はずの）手続き方略を認知科学ではアルゴリズム(algorithm)と呼んでいる。

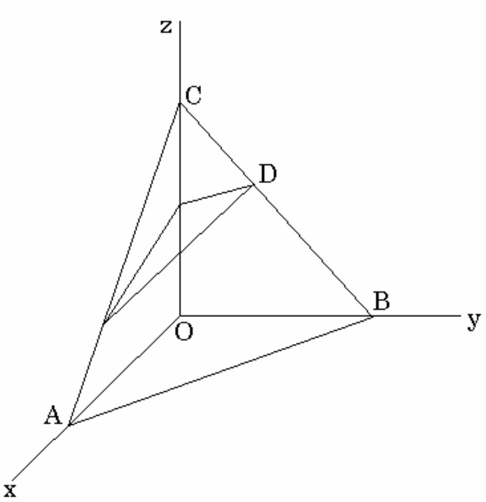
それに対して［問題１］［問題 2］に見られる解法は、ある問題では適用できても、他の問題では解けないことも多い。それでいながら、解決できたときには非常に簡潔に至ることが多い。このように比較的簡単で、解決に有効にはたらくが、必ずしも解決の保証のない方略をヒューリスティクス(heuristics)と呼んでいる。

(3) ポリアの発見学

ポリアの発見学も全く同様とまでは言わないまでもこの heuristics とよく似ている。つまりポリアの発見学は「いかにして（うまく）問題を解くか」という立場から、それぞれの問題に対して有効な方略・解法を見つけていくためのものである。

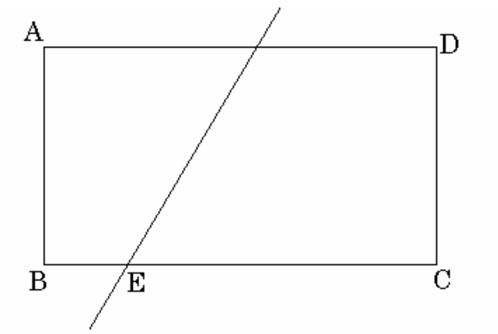
3-1-4 発展的な考え方

この問題を発展させて考えれば、「四面体と平面の問題」や「四角形と直線」といったものも考えることができる。

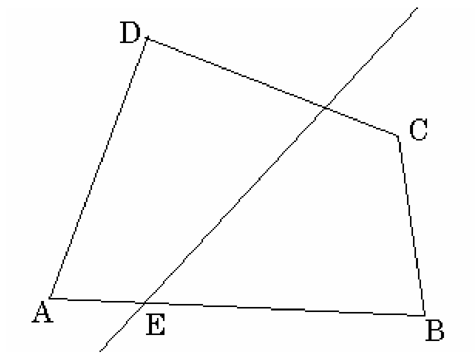


左図のように、「四面体 O-ABC に対して BC 上の点 D を通る平面でこの四面体の体積を２等分したとき、この平面の方程式を求めよ」
のような問題も、いままでの問題を発展させたものと考えることができる。いままでのスキーマを使いながら解くとしたら、ここで使われるストラテジーは「スキーマを拡張するもの」と考えられる。

このまま拡張していけば、「四次元の図形」を立体（三次元）で切ることもできるかもしれない。しかし、そこには人間のア・プリオリな感覚を越えたものが必要とされる。したがって、いつの場合も「図に描くストラテジー」が有効に働くわけではないことがわかる。



問題を三角形から拡張することもできる。このとき、長方形から台形へとより一般化した問題にもなる。



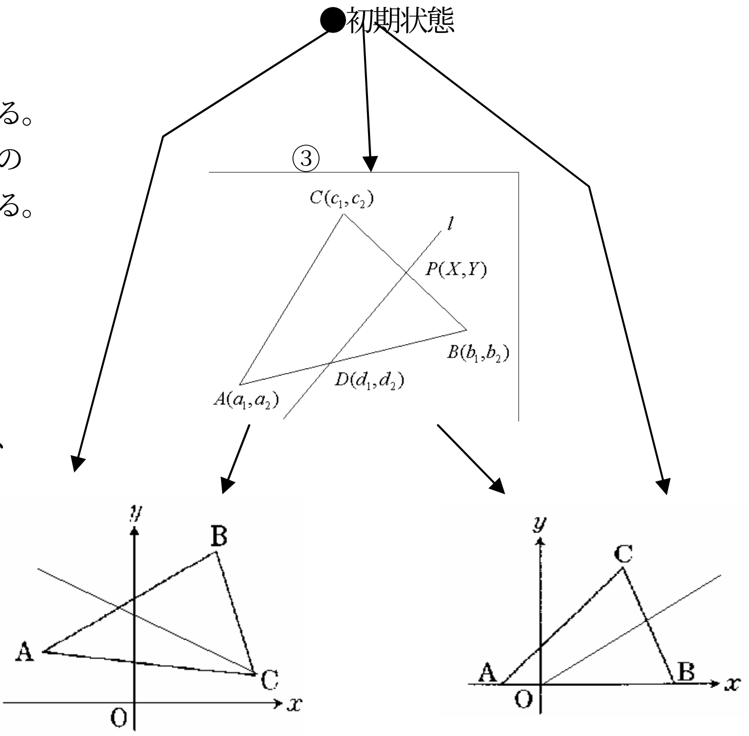
第二節　スキーマとストラテジーの幾何学的モデル

3-2-1 スキーマとストラテジーの幾何学的表示

第一節で述べてきた経過を幾何学的に表現すると右のようになる。
先ほどまで挙げていた問題が一連のスキーマを構成していることがわかる。

このひとつひとつの問題を繋げているものは何であろうか。

「初期状態→①」としているものは、「高さを共有している」性質を利用し、「面積比から底辺比」へ「次元を落とす」という考えである。



①　②

「初期状態→③→①」「初期状態→③→②」は「一般性は高い」が手間がかかる。しかし、演算を自動化させればほぼ確実に結果を導くことができる。

「初期状態→②」は、通る点が原点であったという特殊性によって解決が易しくなっていることがわかる。

この図全体がスキーマともいえるし、その問題場面に対して問題解決者が知っている範囲が知識スキーマである。知らない部分は、解決の際に発見的にならざるを得ない。
また、このスキーマそのものを知識としてもち、同じ問題であれば、そのスキーマをアルゴリズム的に用いて、ルーチンな解決を図る。これが、「四角形を二等分する」ような問題に対して、「類推的に働く」こともある。このとき、初めて解く問題であれば、ノンルーチンで「類推の考え方」をストラテジーとして用いた、と考えられる。
つまり、「数学的な考え方」は、後から見れば、「ルーチン」でも「ノンルーチン」でもかまわない。しかし、ルーチンな解決をしたとき「数学的な考え方」をストラテジーとは呼びにくい。それが発見的な解決ではないからである。

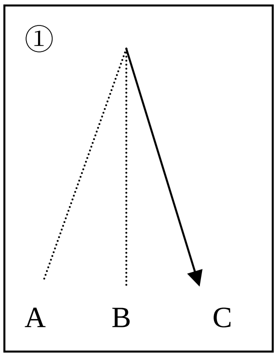
3-2-2 考察

いま述べてきたものをまとめて、ストラテジーとスキーマの関係を幾何学的モデルにすると、次の３通りが考えられる。

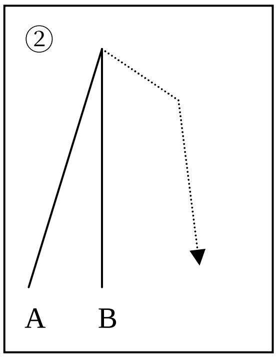
① すでにあるスキーマから選択するストラテジー

② スキーマを拡張するストラテジー

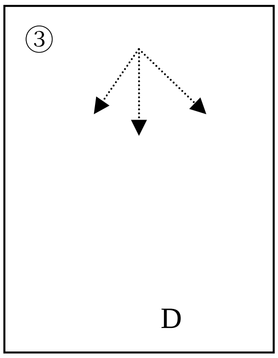
③ 新しい問題場面でスキーマを作ろうとするストラテジー



① ある問題に対して、用いるべき手段・知識が揃っているが、「どの手段を用いればいいか見出せないでいる」とき、我々は数を代入したり（具体化・特殊化）といった手段で、解決の計画を立てるはずである。実際に選択されたストラテジーは、既知のもので、「解法」と呼ばれたり、「数学的な考え方」と呼ばれたりする。



② A,B の形式の問題は、解いたことがあるが、直面している問題はまだ解いたことがない。そんなとき我々は、あらゆる「数学的な考え方」を用いて解決を試みる。このとき「数学的な考え方」はストラテジーとして用いられたと考えられる。



③ 全く知らないと思われる問題場面に直面したとき、我々は既存のスキーマやストラテジーを使って解決できないかと検討するはずである。この検討に用いた「数学的な考え方」は、ストラテジーとして機能しているはずである。

つまり、問題場面を次の３つに分けることができる。

① ほとんどルーチンな問題場面

② ルーチンな部分もあるが、ノンルーチンな部分もある問題場面
③ ほとんどノンルーチンな問題場面

①にある「ほとんど」というのは、「わずかなノンルーチン部分」つまり、ストラテジーを選択したり、解法を当てはめるための工夫をしたりといった余地を残した問題のことである。

すでに知っている問題の類似問題を解く際に、まったく工夫せずに既有知識を転移（当てはめて解く）できることはほとんどない。だからこそ、「例題を覚えたが、練習問題を解くことができない」ということが起こるのである。

③にある「ほとんど」というのは、「全く既知の部分のない問題」では、問題の中に切り崩す余地がなくなってしまうからである。一見、全くしらない問題であっても、その中には必ず既有の知識を必要とし、その部分を発見することによって解決を図ることになる

第四章　発見的方法に基づく問題解決方略の指導

第一節 発見的指導の重要性

4-1-1 ストラテジーのアルゴリズム化

塚原[xxxvii]は、高校生の数学的な考え方を伸ばすために、ストラテジーを以下の１４個にまとめている。

① draw a figure, diagram（絵，図を書く）
② inductive thinking（帰納的思考）
③ analogy（類推）
④ fewer variables（変数を少なくする）
⑤ specialization, generalization（特殊化，一般化）
⑥ reformation（再形式化）
⑦ auxiliary problem（補助問題）
⑧ divide into cases（場合分け）
⑨ go back to definition（定義に戻る）
⑩ set up equations（等式を作る）
⑪ indirect proof（間接証明）
⑫ work backwards（逆向きにたどる）
⑬ symmetry（シンメトリー）
⑭ logical reasoning（論理的推論）

彼は著書『高校数学による発見的問題解決法』のなかで、このストラテジーの中から１０個のストラテジーを選び、例題を分類している。

例えば、Symmetry の章では、

問題 7.1　三角形 ABC において、tanA, tanB, tanC の値がすべて整数であるとき、それらの値を求めよ。

問題 7.2

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$　をみたす自然数　a,b,cを求めよ。

問題 7.3

次の条件を満たすx,y,zを座標とする点全体の集合をRとする。

$0\leq x,\quad 0\leq y,\quad 0\leq z$

$\max(x,y,z)\leq a$　・・・・・・①

$x+y+z-\min(x,y,z)\leq a+b$　・・・・・・②

Rの体積Vを求めよ。ただし、a,bは定数で、$0<b<a$とする

問題 7.4

一辺の長さが１である正三角形ABCの辺AB,BC,CA上に点P,Q,Rを、

$\frac{AP}{AB}+\frac{BQ}{BC}+\frac{CR}{CA}=1$　・・・・・・（＊）

となるようにとる。　このとき、三角形PQRの面積の最大値を求めよ。

問題 7.5

実数a,b,cについて、

$a+b+c=1,\quad a^2+b^2+c^2=\frac{1}{3}$

の関係があるとき、a,b,cの値を求めよ。

問題 7.6

たてx,横y,高さzの長さの和がaで、表面積が$\frac{a^2}{2}$となる直方体の体積をVとする。このとき、Vの最大値を求めよ。

問題 7.7　A(0,0,6), B(0,0,20)とする。 xy 平面上の点 P(x, y, 0)で、∠APB≧30°をみたすものの全体が作る図形の面積を求めよ。

問題 7.8

点Oを中心とする半径１の円Cに含まれる２つの円C_1,C_2を考える。ただし、C_1,C_2の中心O_1,O_2はCの直径AB上にあり、C_1は点Aで、またC_2は点BでそれぞれCと接している。またC_1,C_2の半径をそれぞれa,bとする。C上の点PからC_1,C_2に１本ずつ接線を引き、それらの接点をQ,Rとする。

（１）$\angle POA=\theta$　とするとき、PQをθで表せ。

（２）PをC上で動かしたときの$PQ+PR$の最大値を求めよ。

問題 7.9

$k>0$とする。xy平面上の二曲線、

$y=k(x-x^3)$　・・・・・・①、　$x=k(y-y^3)$　・・・・・・②

が第１象限にα≠βなる交点(α,β)をもつようなkの範囲を求めよ。

以上のような９個の例を挙げている。この中には、対称性から計算を省くものや、最大値を取る形、対称性を活かした置換といったものが含まれており、それぞれが独自の解法を必要としている。一口で「対称性を活かす」の名のもとに、すべての問題を解決できるわけではない。

問題解決の経験が豊富にある問題解決者であれば、「対称性を活かす」という題目のもと、なんとか解決に辿りつけるかもしれない。しかしそれには、それぞれの問題場面や基礎知識をもとにした解決が必要であることを示唆しているのである。したがって、逆に、問題解決の経験が少ない、もしくは学力下位の問題解決者になると、「対称性を活かした」解法を覚えることになり、ストラテジーはアルゴリズムになってしまうのである。

このことから、ノンルーチンな場面での問題解決の能力を増すためにストラテジーを指導しているはずが、皮肉なことに、そのストラテジーがアルゴリズムになってしまい、問題解決能力を育てることにつながっていないことが分かる。学力下位群では、問題場面でのスキーマや知識が不足しているために、ストラテジーをうまく使いこなせないのであろう。

4-1-2 発見的な方略指導の重要性

問題解決ストラテジーのリストを受容的に学習しても、学力下位群では効果が望めないことは、第二章でも触れている。ストラテジーを受容的に学習して、効果があるかどうかは、その生徒の問題解決スキーマや知識に依存している。したがって、問題解決スキーマや数学的な考え方と一緒に、問題解決を通して、発見的な学習をしていくことが必要と考えられる。

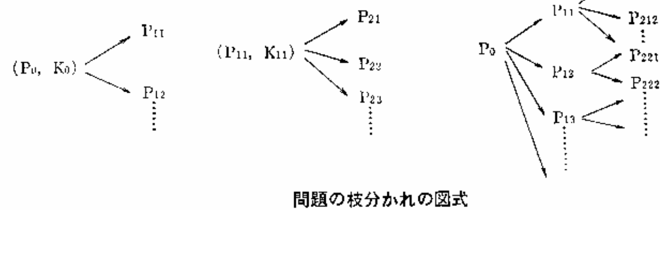
第二節 数学的な考え方と問題解決方略の指導

4-2-1 問題から問題へ

竹内と沢田は、『問題から問題へ』[xxxviii]の中で、「問題の発展的な扱いによる授業」を提案している。

ある問題を解決すると、解かれた問題は、必ず新しいいくつかの問題を生む。そのそれぞれの問題がまた解かれようとする。そういった「問題の自己増殖」つまり「問題から問題へ」の経過や飛躍を彼らは「問題の発展」と名付けている。

「最初の問題 P0 を解決して、ある知見(知識)K0 が得られた。次に P0 と K0 から、新しい問題 P11、P12 が立てられて、それらを解決して知見 K11、K12、･･･が加えられた。以下左図のように進行する。問題を発展させ、それらを解くことによって得られた知見は、そ



問題の枝分かれの図式

れぞれに先行する知見と比べて、必ずしも新しいものとは限らないが、一般的には先行のものより一般化された、あるいはより深められたものであろう。

また同じ問題を出発点としても、その発展のさせ方は一通りではなく多様であろう。またより意義のある（数学的に価値のある）発展のさせ方はその人の数学的力量や数学的洞察力に、あるいはまた偶然性によることであろう。」（『問題から問題へ』p15-16）

このような問題から問題へと移り変わる、問題意識の変容を指導に持ち込んだ例として、「問題づくり」の指導がある。生徒が「原問題」を解決した後、「この問題から思いついた新しい問題をいろいろつくってみなさい」と指示する。生徒は条件、場面や題材を変えたり、一般化させたりする。

放物線$y=\frac{1}{4}x^2$がある。この放物線上の点(2,1)における接線の方程式を求めよ。

このような問題を原問題とするとき、以下のような反応が考えられる。

(a) 放物線を円、楕円、双曲線などにする。

(b) ・放物線上の点(2,1)に着目して、定点を曲線上の点から曲線外の点に変える。

・定点を与えず、傾きを与える

・定点、傾きのいずれも与えない。

問題づくりを通して、生徒は二次曲線と接線の問題場面における問題解決スキーマを構成することができる。判別式＝０という性質や、解法の一貫性を発見的に捉えることができる。

こういった経験の上で、例えば、球と接する平面の式を求めるときに、円と直線に類比することもできるようになる。「次数を下げる」といったストラテジーも、構築されたスキーマがあってはじめて、使うことができる。

4-2-2 what-if-not の視点

「問題づくり」だけが、「問題から問題へ」の指導ではないだろう。教師の発問によって、発展的な考え方へと誘導することもできる。問題から問題を生み出すための変数の役割となるのが、数学的な考え方であるし、ポリアのストラテジーである。「類比させてみよう」「一般化させてみよう」「対称性がなりたつとしたらどうだろうか」といった問いが自ら発するようになれば、数学的な考え方やストラテジーが生徒に根付いたといえるのではないだろうか。

「問題の発展的扱い」の有力な方法として、S.Brown & W.MarionのWhat if not technique[xxxix]がある。ある問題を解決したところで、

(1) その問題、定理の性質、条件を列挙する。これをもとに、次のようにして新しい問題を作っていくのである。
(2) 上の各性質を「もしその性質でなかったらどうなるか」と各性質を否定した質問をしていくのである。
(3) この各質問を順次解析し、そこから得られた新しい問題にアタックしていく。
   ① まず性質を一つずつ「そうでなかったら」と変えていって新しい問題を作り解決を試みる。
   ② いくつかの性質を同時に「これらがもしそうでなかったら」として、より複雑な問題の発見に発展させていく。

問題には、条件という変数がいくつもある（結論も含めて）。そこで、その中の一つの変数だけを変えてみる。これによって問題がどう変わるかをみる。
このように変数のいくつかを固定し、他を変えてみる。時には結論をある条件と入れ替えてみる（独立変数と従属変数を入れ替えることに当たる）のである。したがって、これは問題に対して、関数的な考えによる発展的な考え方を行うことであると同時に、その問題を含む問題群に対するスキーマを構築することであると考えられる。

このようにして、発見的な考え方をもとに、新しい問題を作り解決していくと、考え方やストラテジーを組織化・構造化することができる。ストラテジーや考え方を説明的に教授されるよりも、そのときに必要な条件などをじっくり考えるようになり、問題解決能力の向上に結びつくであろうと思われる。

終章

まとめと今後の課題

本稿のなかの「発見」とは、二つの意味があった。一つは、ヒューリスティクス（発見学）とアルゴリズムという問題解決の立場である。ヒューリスティクスは規範的アプローチ、アルゴリズムは記述的アプローチという違いがあった。もう一つは、発見学習と有意味受容学習という指導方法もしくは学習方法の違いである。
ヒューリスティクス（発見学）を身につけるためには、学習方法も発見的でないとならない。問題解決の経験が豊富で、技術に長けている問題解決者にとっては、ストラテジーをリストで与えられただけでも問題解決に活かすことができる。しかし、そういった経験も技術もない者にとって、ストラテジーを説明的に与えられても、数学的な考え方に対する知識そのものが不足していることから、なかなか問題を解けるようにならない。
筆者が、予備校で受けたストラテジー指導も有意味受容学習であった。数学的な考え方を広げていく活動が足りなかったのだと、今は考えている。
したがって、これからはストラテジーにこだわらず、数学的な考え方を身につける、伸ばす指導について考えていくつもりである。

本研究にあたって、教育実習のような短い期間の中でしか、問題解決ストラテジーの指導を試すことができなかった。ストラテジーや数学的考え方の指導は、年間を通じて行ってこそ、児童・生徒に根付いていくものと考えている。これから教育現場に出て、教科書の基礎事項を教えるなかで、どのようにして児童・生徒の問題解決能力を伸ばすことができるか。実践の中で考えていきたい。

謝辞
本稿は、東京学芸大学の清水美憲助教授による御指導のもとに書いたものである。ここに記して深謝の意を表します。

参考・引用文献
第一章
第一節
[i] Polya, G. (1945,1973) *How to solve it. 2nd Edition.* Princeton,NJ : Princeton University Press. （垣内賢信訳 ,1955,『いかにして問題をとくか』,丸善 第 11 版）
[ii] 秋山仁『発見的教授法による数学シリーズ』,第１～６巻, 駿台文庫, 1989
[iii] 能田伸彦,清水静海,吉川成夫監修 『２１世紀への学校数学の創造 米国NCTMによる「学校数学におけるカリキュラムと評価のスタンダード」筑波出版会 1997 p.7
[iv]島田茂, 『算数・数学科のオープンエンドアプローチ』東洋館出版社, 1995
同名 , みずうみ書房, 1977（絶版）の再版
[v] 文部省,『小学校学習指導要領解説 算数編』,東洋館出版社,1999 ,pp167-170

第二節
[vi]竹内芳男・沢田利夫著(昭和 60)『問題から問題へ』初版 第２刷 東洋館出版社 P.14
[vii] Polya,George. "On solving Mathematical Problems in High School." In *Problem solving in School Mathematics*, 1980 Yearbook of the National Council Of Teachers of Mathematics, edited by Stephen Krulik, pp.1-2. Reston, Va.: NCTM, 1980
[viii] Polya, G. (1962, 1981) Mathematical Discovery (Combined Edition). New York, NY: Willy.（柴垣和三雄・金山靖夫訳(1964)『数学の問題の発見的解き方 第１巻、みずず書房』p.66-67
[ix]岩波書店 『哲学・思想事典』,岩波書店 ,1998 第１刷 p1276
[x] デカルト （野田又夫訳）(1974) 『精神指導の法則』（第 23 刷改訳） 岩波書店
[xi] Alan H. Schoeneld , (1985) *Mathematical Problem Solving*. Orland, FL: Academic Press. P.23
[xii] 『算数・数学科 問題解決指導ハンドブック』Ｓ・クルーリック Ｊ・Ａ・ルドニック著
伊藤説朗 訳・解説 １９８５
[xiii]上掲 ｘｉ) p.23
「 Heuristic strategies are rules of thumb for successful problem solving,～」

第二章
第一節
[xiv] 大須賀康宏・石田淳一：楽しく学べる算数の問題解決ストラテジー, 東洋館出版社, 1986
[xv] 横山正夫 「算数科問題解決ストラテジーの活用に関する分析的研究(1)」日本教育工学会研究報告集, JET90-3, 1990, pp.33-40
[xvi] Schoenfeld, A.H. Can Heuristic Be Taught? In Cognitive Process Instruction. 1980
[xvii] 上野正幸 「ストラテジー獲得による問題解決力の育成―低学年におけるストラテジー指導」日本数学教育学会誌 算数教育 68 巻 35-6 ,1986
[xviii] G.Lenchner , *Creative Problem Solving in School Mathematics* , Houghton Mifflin, 1983
[xix] 布川和彦, 「算数・数学学習における問題解決ストラテジーの二つの型について―問題解決活動との関わりから

ー」．筑波数学教育研究第７号　,1988

[xx] 小林広利ほか 12 名 「問題解決における方略の習得をめざす指導」.日本数学教育学会会誌, 76 巻『数学教育』7 号 pp.20-27

[xxi] 片桐重男,1988, 『数学的な考え方の具体化』,明治図書

[xxii] 清水克彦 「問題解決教授における方略指導に関する一考察」,筑波数学教育研究第１号, 1982

[xxiii] Owen, E. & Sweller, J. Should Problem Solving Be Used as a Learning Device in Mathematics? *Journal for Research in Mathematics Education, v.20*, 1989, pp322-328

[xxiv] Lawson, M.J. The Case for Instruction in the Use of General Problem-Solving Strategies in mathematics Teaching: A Comment on Owen and Sweller. *Journal for Research in Mathematics Education, v.21*, 1990 , pp.403-410

[xxv] Sweller, J. On the Limited Evidence for the Effectiveness of Teaching General Problem Solving Strategies. *Journal for Research in Mathematics Education, v.21*, 1990, pp.411-415

[xxvi] 石田淳一, 「問題文生成課題による算数文章題の理解過程の分析――割合文章題に焦点をあてて――」,日本数学教育学会 第２２回数学教育論文発表会論文集, 1989, pp.67-72

[xxvii] Stanic, G. M. A. & Kilpatrick, J. 1988. Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In R.I. Charles & E. A. Silver (eds.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*. Reston, VA: NCTM

[xxviii] Schoenfeld, A. H. 1985. *Understanding and Teaching; the Nature of Mathematical Thinking* . Paper presented at the University of Chicago, School Mathematics Project, International Conference on Mathematics Education.

[xxix] 布川和彦 「学校数学におけるストラテジー指導に関わる問題点についてーストラテジー指導に対する批判を手がかりとした新しい方向性の探求ー」,筑波大学教育学系論集 第 16 巻 第 1 号,1991 , pp.83-94

第２節

[xxx] 衣田新（監修）『新・教育心理学事典』,金子書房, 1983

[xxxi] 横山正夫,「算数科における問題解決ストラテジーの指導に関する研究」,日本数学教育学会, 数学教育学論究 第 73 巻 vol.56 , 1991 pp.3-17

[xxxii]布川和彦 「学校数学におけるストラテジー指導に関わる問題点についてーストラテジー指導に対する批判を手がかりとした新しい方向性の探求ー」,筑波大学教育学系論集 第 16 巻 第 1 号,1991 , pp.83-94

[xxxiii] 石田淳一,「長期間の問題解決方略の指導を受けた小学６年生の問題解決方略の使用に関する上位ー下位分析ー「パターン発見」方略の使用過程を中心にー」, 日本数学教育学会, 数学教育学論究 第 69 巻 ,1998 ,pp.3-19

第三章

[xxxiv] Nelson,T.O. & Narens, L. 1994 Why investigate metacognition? In J. Metcalfe & A.P. Shimamura (Eds.) , *Metacognition*. MIT Press. pp.1-25

[xxxv] 三宮真智子 1995 メタ認知を促すコミュニケーション演習の試み「討論編」――教育実習事前指導としての教育工学演習から――. 鳴門教育大学学校教育研究センター紀要, 9, 53-61

[xxxvi] Polya, G. (1945,1973) *How to solve it. 2nd Edition.* Princeton,NJ : Princeton University Press. （垣内賢信訳 ,1955,『いかにして問題をとくか』,丸善 第 11 版）

第四章

第一節

[xxxvii] 塚原成夫, 『高校数学による発見的問題解決法 ストラテジー入門』, 東洋館出版社,, 1994

第二節

[xxxviii]竹内芳男・沢田利夫(昭和 60)『問題から問題へ』初版 第２刷 東洋館出版社

[xxxix] Stephan Brown & Walter Marion “What if not?” *Mathematics Teaching* 46 (Spring 1969), pp.38-45, 51, (Spring 1970), pp.9-17